* INSIEMI.

25/09/2015

- Un insieme può essere descritto in due modi:
  1. Dando la lista completa dei suoi elementi
  es. $A = \{1, 7, \text{parola}\}$
  2. Attraverso la descrizione di una proprietà dell'insieme:
  es. B è l'insieme di tutti i numeri pari positivi.

$$B = \{x \in N : x \text{ è pari}\}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- **PROPRIETA':**
  - Unioni di due insiemi; $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
  - Intersezione di due insiemi; $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
  - A senza B; $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
  - ($A \subseteq B$) A contenuto in B; ogni elemento di A è anche elemento B, cioè se $x \in A$ allora $x \in B$.
  - Prodotto di due insiemi; $A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$.
    (a,b) è una COPPIA dove $a \in A$ e $b \in B$.
    Il piano cartesiano è un esempio di prodotto $\mapsto (x,y)$, $R \times R$

- **QUANTIFICATORI:**
  - $\exists$ → esiste
  - $\forall$ → per ogni

- Esempi di utilizzo:

① $A = \{x \in N : \exists\, y \in N : x = 2y\} = \{x \in N \wedge x \text{ è pari}\}$

② $B = \{x \in R : \forall y \in R \;\; x \geq y\}$

- $B = \emptyset$, non esistono $x \in R : \forall y \in R \;\; x \geq y$.

③ $y = x^2 + 1 \rightarrow B = \{(x,y) \in R \times R : y = x^2 + 1\}$

- Cos'è un sistema? E' l'insieme delle soluzioni delle equazioni che contiene.
- Esempi: ①

$$\begin{cases} x^2y + y = 0 \\ x^2y + xy = 0 \end{cases} \Longrightarrow C = \{(x,y) \in R^2 : x^2y + y = 0 \wedge x^2y + xy = 0\}$$

$\updownarrow$

$R \times R$

② $\begin{cases} y(x^2+1)=0 \\ x^2y+xy=0 \end{cases}$ $\rightarrow x^2+1 \geq 1$ si ha $x^2+1 \neq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^2y+xy=0 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x^2 \cdot 0 + x \cdot 0 = 0 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow$ Il sistema iniziale è equivalente all'unica equazione $y=0$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=0\} = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2\}$

- Altri esempi di utilizzo:

④ $D = \{y \in \mathbb{R} : $ l'equazione nella variabile x, $x^2+2(y+1)x+y^2=0$ ha soluzioni$\}$

$D = \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in \mathbb{R} : x^2+2(y+1)x+y^2=0\}$

$a = 2(y+1)$, $b = y^2 \rightarrow \Delta = 4(y+1)^2 - 4y^2 = 8y+4$

$\rightarrow D = \{y \in \mathbb{R} : 8y+4 \geq 0\}$

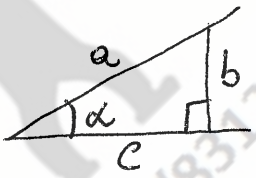
$8y+4 \geq 0$; $8y \geq -4$; $y \geq -\frac{1}{2}$

$\rightarrow D = \{y \in \mathbb{R} : y \geq -\frac{1}{2}\}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

* SENO E COSENO.

Se $\alpha < 90°$

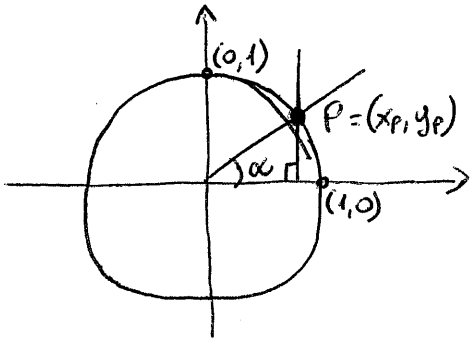


$\sin \alpha = \frac{b}{a}$

$\cos \alpha = \frac{c}{a}$

Altrimenti

Prendiamo in considerazione la circonferenza di raggio 1 (GONIOMETRICA)



$a = 1$

$b = y_P$

$c = x_P$

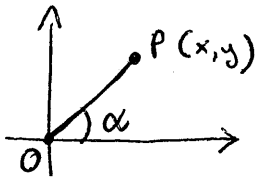
$\sin \alpha = y_P$

$\cos \alpha = x_P$

$P(\cos \alpha, \sin \alpha)$

2/10/2015

* COORDINATE POLARI.



- Si indica la distanza $\overline{OP}$ come modulo di P ($\overline{OP} = |P|$)
- Si indica l'angolo α come argomento.
- Per qualsiasi valore di α abbiamo che:

$$\boxed{\text{sen}\,\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1}$$

e viceversa che: $\boxed{u^2 + v^2 = 1}$.

- Esiste, infatti, un solo angolo α tale che $\boxed{\begin{cases} \cos\alpha = u \\ \text{sen}\,\alpha = v \end{cases}}$
- Le coordinate di P sono dunque:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos\alpha \\ y &= \rho \cdot \text{sen}\,\alpha \end{aligned}}$$

dove ρ (ROH) è il modulo di P.

- Allora $\forall\beta$ $\begin{cases} \cos\beta = u \\ \text{sen}\,\beta = v \end{cases}$

$\beta = \alpha + 2K\pi$ con $K \in \mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$

Esempio:

$P(\sqrt{2}, 0) \longrightarrow \rho = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

* I CAMPI.

- DEFINIZIONE: un campo è l'insieme K di numeri e di due operazioni (somma e prodotto), ovvero: $\forall a, b \in K$ è definita la somma $a+b$ e il prodotto $a \cdot b$. In un campo sono fissati due elementi distinti $(0, 1 \in K)$. Queste operazioni verificano le seguenti proprietà:

- COMMUTATIVA.

$$\forall a, b \in K \text{ vale che } \begin{cases} a+b = b+a \\ a \cdot b = b \cdot a \end{cases}$$

- ASSOCIATIVA.

$$\forall a, b, c \in K \text{ vale che } \begin{cases} (a+b)+c = a+(b+c) \\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \end{cases}$$

- ELEMENTO NEUTRO.

$$\forall a \in K \text{ vale che } \begin{cases} 0+a = a \\ 1 \cdot a = a \end{cases}$$

• OPPOSTO E RECIPROCO.

• $\forall a \in K, \exists b \in K : a+b=0$ OPPOSTO $\boxed{b=-a}$

• $\forall a \in K \wedge a \neq 0, \exists b \in K : a \cdot b = 1$ RECIPROCO $\boxed{b=\frac{1}{a}=a^{-1}}$

• DISTRIBUTIVA.

$\forall a,b,c \in K$ vale che $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Esempio: voglio far vedere che $0 \cdot x = 0$

$$0 = 1-1$$
$$x \cdot 0 = x \cdot (1-1) = 1 \cdot x - 1 \cdot x = \boxed{x-x=0}$$

*NUMERI COMPLESSI.

• Vogliamo introdurre un campo che contiene R nel quale $x^2 = -1$ abbia soluzione.

$$R^2 = \{(a,b) : a,b \in R\}$$
$$(a,b) + (c,d) = (a+b, c+d)$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

• R^2 adesso forma l'insieme $\boxed{C}$ dei NUMERI COMPLESSI.

•TEOREMA:

C con somma, prodotto, 0, 1 appena definiti è un campo.

dimostro:

Verifico che:

(1) $(z \cdot w) \cdot v = z \cdot (w \cdot v)$ $\forall z,w,v \in C$

$z = (a,b)$ $a,b \in R$
$w = (c,d)$ $c,d \in R$
$v = (e,f)$ $e,f \in R$

$\Downarrow$

$z \cdot w = (ac-bd, ad+bc)$;

[illegible]

$(z \cdot w) \cdot v = (ac-bd) \cdot e - (ad+bc) \cdot f, (ac-bd) f + (ad+bd) e =$

$\rightarrow = \underline{(ace-bde-adf-bcf, acf+ade+bce-bdf)}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$w \cdot v = (ce - df, cf + de)$;

$z \cdot (w \cdot v) = \big(a(ce-df) - b(cf+de),\ a(ef+de) + b(ce-df)\big) =$

$= (\underline{ace - adf - bcf - bde},\ \underline{acf + ade + bce - bdf})$

$\boxed{(z \cdot w)\, v = z(w \cdot v)}$ vero!

② $\forall z \in \mathbb{C}$: $\boxed{1 \cdot z = z}$ vero!

$1 \cdot z = z$; $(1,0) \cdot (a,b) = (1 \cdot a - 0 \cdot b,\ 1 \cdot b + 0 \cdot a) = (a,b) = z$

FINE TEOREMA.

- Sia $i = (0,1)$

$i^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -(1,0) = \underline{(-1) \in \mathbb{C}}$

- Sia $\mathbb{r} = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$

$$\underset{x}{\mathbb{R}} \longleftrightarrow \mathbb{r}$$
$$(x,0)$$
$$x + y \longleftrightarrow (x,0) + (y,0)$$
$$xy \longleftrightarrow (x,0) \cdot (y,0)\ ;\ xy \longleftrightarrow (xy,0)$$

- Quando scrivo $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ sto pensando ad $\mathbb{R}$ come l'insieme degli elementi $(x,0) \longleftrightarrow x$.

- Ogni numero complesso si scrive come $x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$

$(x,0) + (0,1) \cdot (y,0) = (x,0) + (0 \cdot y - 1 \cdot 0,\ 1 \cdot y + 0 \cdot 0) =$

$= (x,0) + (0,y) = \boxed{(x,y)}$ quindi $\boxed{(x,y) = x + i \cdot y}$

- OPERAZIONI TRA NUMERI COMPLESSI:

- PRODOTTO: $\left.\begin{matrix} z = a + bi \\ w = c + di \end{matrix}\right]$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$(a+bi) \cdot (c+di) = ac + adi + cbi + bdi^2 = ac - bd + (ad + cb)i$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745